المحاضرة الثامنة

الدوال التحليلية:

لتكن $w=f(z)$ دالة بمتغير عقدي معرفة على النطاق D ولتكن $z_0 \in D$

نقول عن الدالة $w=f(z)$ أنها تحليلية عند النقطة z_0 إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة (z_0) وعند جميع نقاط جوار ما لهذه النقطة

ويمكن إثبات وبسهولة ما يلي:

1. مجموع دالتين تحليليتين هو دالة تحليلية
2. جداء دالتين تحليليتين هو دالة تحليلية
3. قسمة دالتين تحليليتين هي دالة تحليلية بشرط أن لا ينعدم المقام.
4. وإذا كانت الدالة $w=f(z)$ دالة تحليلية عند النقطة (z_0) وكانت الدالة $W=g(w)$ عندئذٍ تكون الدالة $F(z)=(g\circ f)(z)$ هي دالة تحليلية عند النقطة z_0

- نقول عن الدالة $w=f(z)$ أنها تحليلية على النطاق V إذا وفقط إذا كانت f تحليلية عند كل نقطة من نقاط هذا النطاق.
- نقول عن الدالة $w=f(z)$ أنها دالة شاملة إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي.
- نقول عن النقطة z_0 أنها شاذة للدالة $w=f(z)$ إذا وفقط إذا كانت هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 وكانت قابلة للاشتقاق عند نقطة واحدة على الأقل من جوار ما لهذه النقطة.

مثال: $f(z)=\frac{1}{z}$

إن النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة لهذه الدالة لأن هذه الدالة غير معرفة عند النقطة $z=0$ وبالتالي فهي غير مستمرة وبالتالي فهي غير قابلة للاشتقاق فهي غير تحليلية، بينما عند أي نقطة عند نقاط جوار ما لهذه النقطة $z=0$ فإن هذه الدالة قابلة للاشتقاق.

الدوال التوافقية:

لتكن $h = h(x,y)$ دالة حقيقية تتعلق بالمتغيرين المستقلين x, y نقول بالتعريف عن هذه الدالة أنها دالة توافقية إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية لهذه الدالة من الرتبة الأولى والثانية موجودة، مستمرة وعلاوة على ذلك أن تحقق هذه المشتقات المعادلة التفاضلية.

معادلة لابلاس التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

مثال: بيّن فيما إذا كانت الدالة $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ دالة توافقية في أي منطقة لا تحوي نقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x(x^2+y^2) - 4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 - 4xy^2 + 4x^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

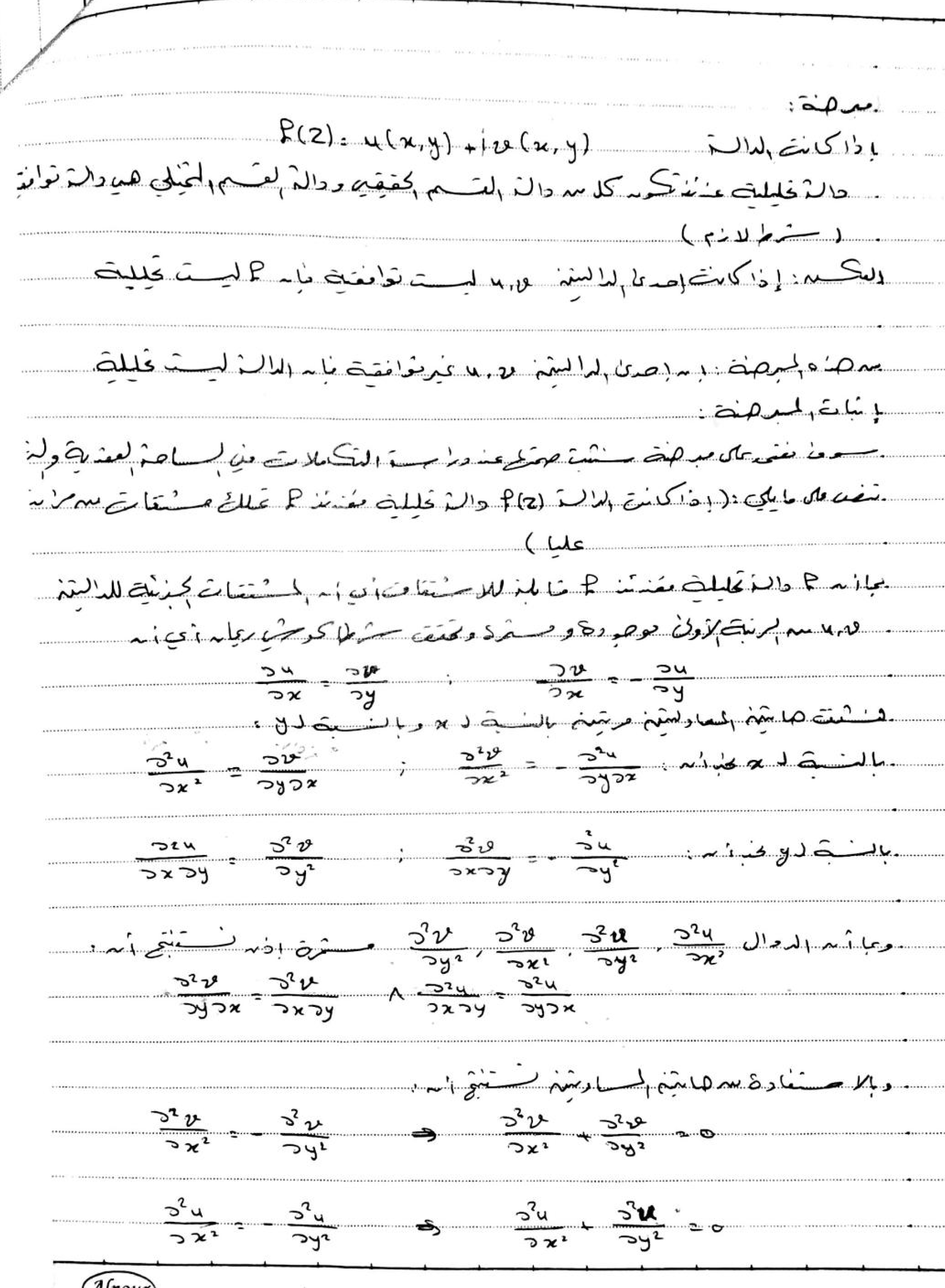
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x(x^2+y^2) + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة في أي نطاق لا يحوي نقطة الأصل علاوة على ذلك فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2 - 2x^3 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

حققت معادلة لابلاس أي أن الدالة المعطاة دالة توافقية.



ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

دالة تحليلية عندئذ تكون كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي هي دالة توافقية

(شرط لازم).

العكس: إذا كانت إحدى الدالتين u, v ليست توافقية فإن f ليست تحليلية

من هذه الملاحظة: إن إحدى الدالتين u, v غير توافقية فإن الدالة ليست تحليلية

إثبات الملاحظة:

سوف نبرهن على ملاحظة مستندين صحتها عند دراسة التكاملات في المساحة العقدية ولذا نتفق على ما يلي: (إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة تحليلية منطقة f تملك مشتقات من رتبة عليا)

بما أن f دالة تحليلية منطقة f قابلة للاشتقاق أي أن المشتقات الجزئية للدالتين u, v من المرتبة الأولى موجودة ومستمرة وتحقق شرطا كوشي ريمان أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

نشتق مرة ثانية المعادلتين مرتين بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y:

بالنسبة لـ x نجد أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

بالنسبة لـ y نجد أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

وبما أن الدوال $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ مستمرة إذن نستنتج أن:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

وبالاستفادة من المعادلتين السابقتين نستنتج أن:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Alnour

من هذا نستنتج أن كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي هي دالة توافقية

المرافقة التوافقية:

لتكن u، v دالتين توافقيتين، نقول عن الدالة v أنها مرافقة توافقية للدالة u إذا وفقط إذا تحقق شرطي كوشي ريمان أي إذا كان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة $f(z) = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad ; \quad v(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

أي أن كل من الدالة $x^2 - y^2$ و $2xy$ دالة توافقية علاوة على ذلك فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$$

فالدالة هي دالة المرافقة التوافقية.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ملاحظة:

إذا كانت v مرافقة توافقية لـ u فليس من الضروري أن تكون u مرافقة توافقية بالنسبة لـ v

مثال يوضح: $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

$$u = 2xy \quad , \quad v = x^2 - y^2$$

إن كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي

استنادا إلى المثال السابق هي دالة توافقية لكن هذه المشتقات الجزئية نلاحظ أنها لا تحقق شرط كوشي ريمان لذلك فإن الدالة v $(x^2 - y^2)$ ليست مرافقة توافقية للدالة $2xy$ وهذا يؤكد صحة الملاحظة.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

Alnour

ملاحظة (دون برهان):

لتكن $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

. إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة f تحليلية هو أن يكون v مرافقتوافقي للدالة u.

"1. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية ← v مرافقتوافقي لـ u

"2- إذا كانت v مرافقتوافقي لـ u ← $f(z)$ دالة تحليلية.

* طريقة إيجاد المرافق التوافقي لدالة معطاة $u = u(x,y)$

مثال:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

"1. نثبت أن الدالة المعطاة هي دالة توافقية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$$

"2- نستخدم شرط كوشي ريمان الأول:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

فنحصل على معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int 3x^2 - 3y^2\,dy$$

"3. نوجد الحل العام لهذه المعادلة وذلك بالمكاملة بالنسبة للمتغير y

$$v = 3x^2y - y^3 + \varphi(x)$$

المتغير الذي لم نكامل بالنسبة له

(الحل العام لمعادلة تفاضلية جزئية هو ذلك الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية ويحتوي على عدد من الدوال الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية).

"4. نستخدم شرط كوشي ريمان الثاني

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

فنحصل على معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x)$$

$$6xy + \varphi'(x) = 6xy$$

$$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c$$

5- نعوض في العلاقة التي حصلنا عليها على الدالة تحويه

$v = 3x^2y - y^3 + c$

$f(z) = u + iv$

الدالة التحليلية: $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + ic$

والتعبير عن هذه الدالة التحليلية بدلالة z نستبدل x بـ z وكل y بـ صفر فنجد أن

$f(z) = z^3 + ic$ فقط لأن تحليلية تعبر عن بـ z

إذا كانت الدالة $f(z)$ غير تحليلية عندئذ نعوض كل x بـ $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ، $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

حتى نحصل على العبارة بالشكل العام.

أما إذا $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ غير تحليلية فعند التعويض السابق لا نحصل عندئذ على العبارة الصحيحة للدالة

$f(z) = x^2 + y^2 + x + iy \qquad = z\bar{z} + z$

إذا استبدلنا كل y بصفر وكل x بـ z

$f(z) = z^2 + z$

$= x^2 - y^2 + i2xy + x + iy = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$

الفصل الثالث:

بعض دوال المتغير العقدي

أولاً: الدالة الأسية

لتكن $w = f(z)$ دالة متغير عقدي ولنفرض أن هذه الدالة تؤول إلى الدالة الأسية للمتغير الحقيقي عندما يؤول المتغير العقدي z إلى المتغير الحقيقي x فإن هذه الدالة لابد أن تحقق العلاقة

$$f(x + i0) = e^x$$

لكن نعلم أن $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

وحيث أن تحقق هذه الدالة أي $w = f(z)$ الدالة الشرط: $\frac{d}{dz} f(z) = f(z)$

يمكن إثبات على أن هناك دالة وحيدة فقط تحقق الشرطان السابقان وهي الدالة

$$(1) \quad ... \quad f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

إن هذه الدالة المعرفة بالعلاقة (1) تحقق الشرطان السابقان لأنه

$f(x+i0) = e^x \cos(0) + i e^x \sin(0) = e^x + i e^x(0) = e^x$

كما أن $u(x,y) = e^x \cos y$ ، $v(x,y) = e^x \sin y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

Alnour

هذه المشتقات موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

أي أن هذه المشتقات الجزئية حققت شرطي كوشي ريمان وبالتالي فإن الدالة قابلة للاشتقاق والمشتقة الأولى لها تعطى بالصيغة:

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$$

والدالة الأسية في المساحة العقدية تعطى بالعلاقة $f(z) = e^z$

أي $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

أي أن في الحالة الخاصة عندما $x = 0$ نجد أن:

$$e^{0+iy} = e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

وهذه العلاقة هي علاقة أويلر التي عرفناها سابقاً.

* خواص الدالة الأسية:

نعلم أن: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

ولنفرض أن الشكل القطبي للعدد العقدي $w = e^z$ هو

$$w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

عندئذ نستنتج أن: $|w| = \rho = e^x \Rightarrow |e^z| = e^x$

بشكل عام:

أي أن مقياس e^z هو مقدار حقيقي يساوي إلى e أس القسم الحقيقي للعدد العقدي

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$$

$$\varphi = \arg e^z = y$$

Not: على أن تكون y مقيسة بالقياس الدائري إما (بالدرجة أو الراديان)

إن العدد المعقد $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ وفق الدالة الأسية $w = e^z$

هو خيال (أو صورة) للأعداد المعقدة .

$\log = \ln$ $\qquad z = \operatorname{Log}\rho + i\psi$

(حيث Log هو اللوغاريتم بالنسبة للأساس الطبيعي e)

$$w = e^z = e^{\log\rho + i\psi} = e^{\log\rho} \cdot e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

والمساواة $\{z = \log\rho + i\psi\}$

هي عبارة عن عدد غير منته من الأعداد المعقدة المتساوية بالأجزاء الحقيقية

و المختلفة عن بعضها البعض بالأجزاء التخيلية (بمضاعفات صحيحة للعدد 2π)

أي أن أي نقطة $w = e^z$ هي خيال لعدد غير منته من الأعداد المعقدة التي تقع على مستقيم

يوازي المحور التخيلي وتبعد عن بعضها البعض بمضاعفات صحيحة للعدد 2π

$$-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$$

وإذا ما تم حصر نطاق تعريف الدالة الأسية e^z على الشريحة التي عرضها 2π أي إذا كانت

$-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ عندئذ كل نقطة $w = e^z$ ستكون خيال لنقطة واحدة وواحدة فقط من

هذه الشريحة

$y = \pi$

$y = -\pi$

والمثال الآتي يؤكد هذه الخاصة :

أوجد جميع حلول المعادلة :

$$e^z = 1 + i\sqrt{3}$$

تمرين: باستخدام تعريف النهاية أثبت أن $\lim_{z \to i} z^2 = -1$

الحل:

لنثبت أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ طالما أن $|z - z_0| < \delta$

$|z^2 + 1| = |z^2 - i^2| = |(z-i)(z+i)| = |z-i||z+i|$

لنفرض أن $|z - i| < 1$ عندئذ

$|z + i| = |z - i + 2i| \leq |z - i| + |2i| < 1 + 2 = 3$

وبالتالي بأن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد δ بحيث $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$

عندئذ يكون متباين

$|z^2 + 1| < \varepsilon$ طالما أن $|z - i| < \delta$

تمرين (2): أوجد كل من النهايات الآتية

$\lim_{z \to 2+3i} (z - 5i)^2$ $\lim_{z \to 1-i} (x + i(2x + y))$

الحل:

$\lim_{z \to 2+3i} (z - 5i)^2 = (2 + 3i - 5i)^2 = (2 - 2i)^2 = 4(1 - i)^2 = 4(-2i) = -8i$

$\lim_{z \to 1-i} (x + i(2x + y)) = \lim_{(x,y) \to (1,-1)} x + i \lim_{(x,y) \to (1,-1)} (2x + y)$

$= 1 + i(2 - 1) = 1 + i$

تمرين (3): أوجد نهاية $\lim_{z \to 1+2i} |z^3 - 1|$

الحل:

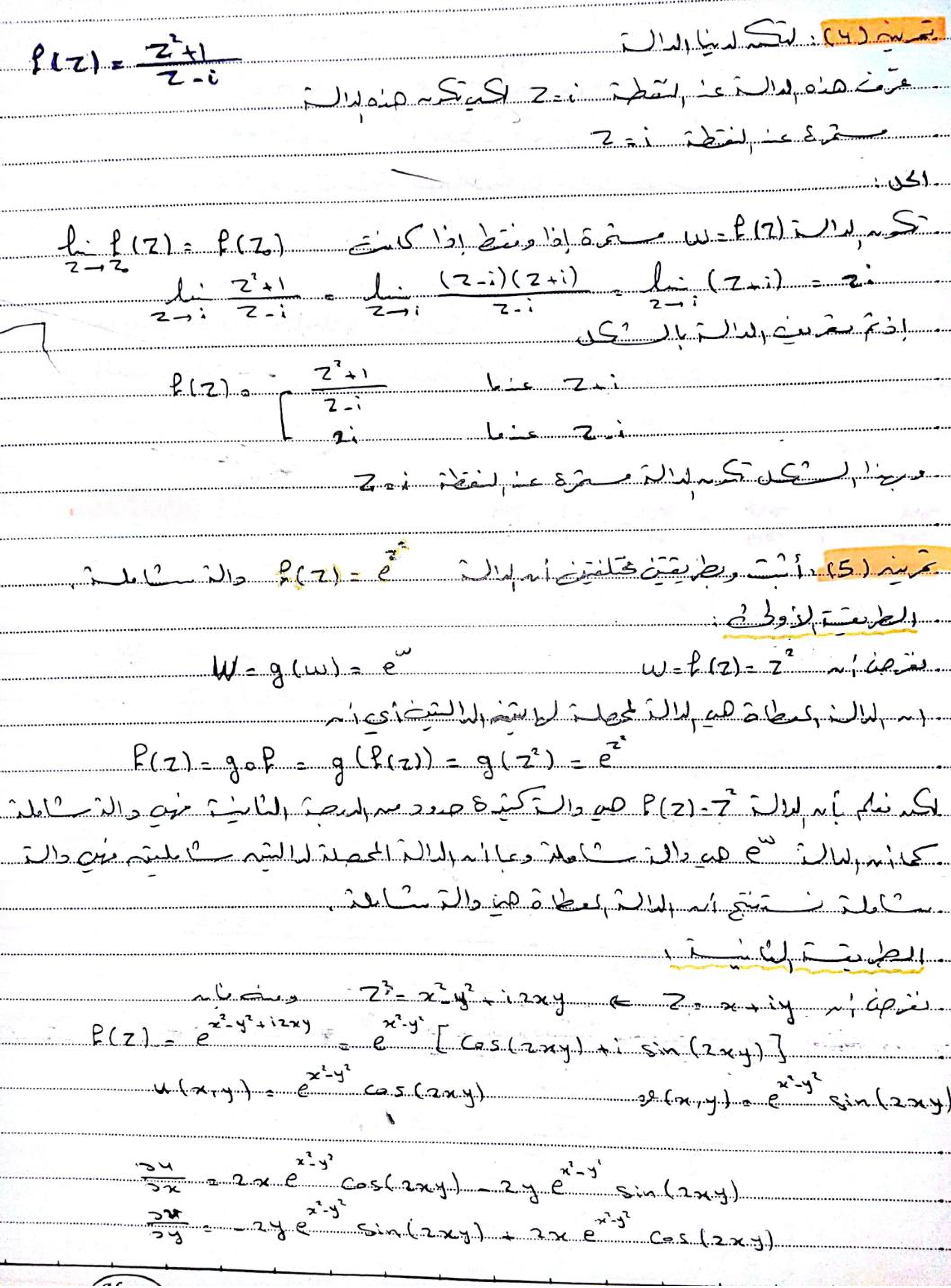
بما أن $\lim f(z) = w_0$ بأن $\lim |f(z)| = |w_0|$

نفترض الحل

$|z^3 - 1| = (1 + 2i)^3 - 1 = 1 + 6i - 12 - 8i - 1 = -12 - 2i$

وبالتالي بأن $\lim_{z \to 1+i} |z^3 - 1| = |-12 - 2i| =$

$\sqrt{144 + 4} = \sqrt{148}$



تمرين (4): لتكن لدينا الدالة

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z-i}$$

عرّف هذه الدالة عند النقطة $z=i$ لكي تكون هذه الدالة مستمرة عند النقطة $z=i$

الحل:

تكون الدالة $w=f(z)$ مستمرة إذا وفقط إذا كانت $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

$$\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z+i)}{z-i}=\lim_{z\to i}(z+i)=2i$$

إذن نعرّف الدالة بالشكل

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2+1}{z-i} & \text{عندما } z\neq i\\ 2i & \text{عندما } z=i\end{cases}$$

وبهذا الشكل تكون الدالة مستمرة عند النقطة $z=i$

تمرين (5): أثبت وبطريقتين مختلفتين أن الدالة $f(z)=e^{z^2}$ دالة شاملة.

الطريقة الأولى:

نفرض أن $w=f(z)=z^2$ ، $W=g(w)=e^{w}$

أن الدالة المعطاة هي الدالة المحصلة للدالتين الأخيرتين أي أن

$$f(z)=g\circ f=g(f(z))=g(z^2)=e^{z^2}$$

لكن نعلم بأن الدالة $f(z)=z^2$ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهي دالة شاملة كما أن الدالة e^{w} هي دالة شاملة وبما أن الدالة المحصلة لدالتين شاملتين هي دالة شاملة نستنتج أن الدالة المعطاة هي دالة شاملة.

الطريقة الثانية:

نفرض أن $z=x+iy \Leftarrow z^2=x^2-y^2+i2xy$ وبهذا فإن

$$f(z)=e^{x^2-y^2+i2xy}=e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]$$

$$u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \qquad v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,e^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2y\,e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\,e^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2x\,e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\, e^{x^2-y^2} \sin(2xy) - 2y\, e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x\, e^{x^2-y^2} \sin(2xy) - 2y\, e^{x^2-y^2} \cos(2xy$$

نلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وعلاوة على ذلك تحقق شرطي كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

مما يعني بأن الدالة المعطاة هي دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي وهذا يعني بأن الدالة المعطاة تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوي وبالتالي هي دالة شاملة

تمرين (6): أثبت أن

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ثم أثبت أن

$$f(z) = e^{i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

__الحل__: نعلم أن:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-r\sin\theta}{r^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{y^2+x^2} = \frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

بعد التعويض في شرط كوشي ريمان الأول :

$$\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{— (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وبالتعويض في شرط كوشي ريمان الثاني نجد أنه :

$$\cos\theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{— (2)}$$

— (1) —

$$\cos \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos \frac{\partial v}{\partial \theta} = \sin\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

— (2) —

$$\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\cos \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

1') $\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \sin\theta\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

2') $\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = -\cos\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

نضرب (1') بـ $\cos\theta$ ونضرب (2') بـ $\sin\theta$ وبالجمع نحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

نضرب (1') بـ $\sin\theta$ ونضرب (2') بـ $-\cos\theta$ ونجمع :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

وهو شرط كوشي ريمان الثاني بالصيغة القطبية

لنثبت الآن أنه

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$f'(z) = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + i\left(\cos \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$

وبالاستفادة من شرط كوشي ريمان بالصيغة الثانية (القطبية) نجد أن:

$$f'(z) = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial v}{\partial r} + i\left(\cos \frac{\partial v}{\partial r}\right) - \left(i \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}(\cos\theta - i\sin\theta) + i\frac{\partial v}{\partial r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= (\cos\theta - i\sin\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right] = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

وهو المطلوب.

تمرين (7):

أثبت أن الدالة $f(z) = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta$

هي دالة شاملة.

الحل:

$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$ $\quad\quad$ $v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$

$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \cos 2\theta$ $\quad\quad$ $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 2r^2 \cos 2\theta$

$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r^2 \sin 2\theta$ $\quad\quad$ $\frac{\partial v}{\partial r} = 2r \sin 2\theta$

نلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة وعلاوة على ذلك فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos 2\theta = \frac{1}{r} 2r^2 \cos 2\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2r \sin 2\theta = \frac{-1}{r}(-2r^2 \sin\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ونلاحظ أن هذه المشتقات الجزئية السابقة تحقق شرطي كوشي ريمان بالصيغة القطبية مما يعني بأن الدالة المعطاة هي دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوى العقدي وهذا يعني أنها تحليلية عند كل نقطة من نقاط المستوى العقدي

أي أنها دالة شاملة.

تمرين (8): أثبت أنه لا يوجد دالة تحليلية قسمها التخيلي هو

$$v = x^2 - 2y^2$$

لنثبت أن هذه الدالة هي دالة غير توافقية

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

وعليه

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + 0 = 2 \neq 0$$

وبالتالي فإن f هي دالة غير تحليلية

$f = u + iv = u + i(x^2 - 2y)$

وهذا يعني أنه لا يوجد دالة تحليلية قسمها التخيلي هي الدالة

$v = x^2 - 2y^2$

تمرين (8): أوجد المرافق التوافقي للدالة

$u = 6xy - 3y$

ثم عبر عن الدالة $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ بدلالة z

الحل:

لنثبت أولاً بأن الدالة توافقية

$\frac{\partial u}{\partial x} = 6y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x - 3$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

لإيجاد المرافق التوافقي نعلم أن

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 6y$

نشتق هذه الدالة بالنسبة لـ x

$v = 3y^2 + \varphi(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x)$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \varphi'(x) = -6x + 3$

$\varphi(x) = -3x^2 + 3x + c$

ومنه فإن المرافق التوافقي $v = 3y^2 - 3x^2 + 3x + c$

ومنه فإن الدالة $f(z) = 6xy - 3y + i(3y^2 - 3x^2 + 3x) + ic$

هي دالة تحليلية

$f(z) = -3iz^2 + 3iz + ic$

المحاضرة العاشرة .

خواص الدوال المثلثية:

إن معظم الخواص للدوال المثلثية في الساحة الحقيقية تكون محققة في الساحة العقدية وهي:

1) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

2) $\sin(-z) = -\sin(z)$

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz}-e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

3) $\cos(-z) = +\cos(z)$

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \sin(z)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \cos(z)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)}-e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-iz}-e^{-i(\frac{\pi}{2})+iz}}{2i}$$

$$= \frac{ie^{-iz}+ie^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

مع العلم:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -i$$

وبنفس الاسلوب نثبت أن: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \sin(z)$

5) $\sin(\pi - z) = \sin z$; $\cos(\pi - z) = -\cos z$

$$\cos(\pi - z) = \frac{e^{i(\pi-z)}+e^{-i(\pi-z)}}{2} = \frac{e^{i\pi-iz}+e^{-i\pi+iz}}{2} = -\frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -\cos z$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad ; \quad e^{-i\pi} = \cos\pi - i\sin\pi = -1$$

وبنفس الاسلوب نثبت أن: $\sin(\pi - z) = \sin z$

6) $\sin(2\pi + z) = \sin z$; $\cos(2\pi + z) = \cos z$

Alnour

$e^{-i\pi}$ $e^{-i\pi}$ e^{-iz}

$\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$

$-1 + i(0) = -1$

$$\sin(2\pi + Z) = \frac{e^{i(2\pi+Z)} - e^{-i(2\pi+Z)}}{2i} = \frac{e^{i2\pi+iZ} - e^{-i2\pi-iZ}}{2i} = \frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{2} = \sin Z$$

وبنفس الأسلوب نثبت العلاقات التالية.

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \quad ; \quad e^{-i2\pi} = \cos 2\pi - i \sin 2\pi = 1$$

7) $\tan(\pi - Z) = \tan Z$ دالة الظل دالة دورية دورها π .

$$\tan(\pi + Z) = \frac{\sin(\pi+Z)}{\cos(\pi+Z)} = \frac{-\sin Z}{-\cos Z} = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \tan Z$$

من خلال ما سبق نثبت أن جميع الخواص في الساحة العقدية هي نفسها في الساحة الحقيقية ما عدا خاصة واحدة هي محدودية دالة الجيب والتجيب.

نعلم أن:

★ $[\sin Z = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y]$

$[|\sin Z|^2 = \sin^2 x \, ch^2 y + \cos^2 x \, sh^2 y]$

$$|\sin Z|^2 = \sin^2 x \, ch^2 y + (1 - \sin^2 x) \, sh^2 y = \sin^2 x \, ch^2 y + sh^2 y - \sin^2 x \, sh^2 y$$

$$= \sin^2 x (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y = \boxed{\sin^2 x + sh^2 y}$$

من هذه العلاقات السابقة نستنتج أن قيمة الجيب المثلثي غير محدود بالساحة العقدية

★ $[\cos Z = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y]$

$[|\cos Z|^2 = \cos^2 x \, ch^2 y + i \sin^2 x \, sh^2 y] = \cos^2 x \, ch^2 y + (1 - \cos^2 x) \, sh^2 y$

$$= \cos^2 x (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y$$

من هذه العلاقات نستنتج أن دالة التجيب المثلثي غير محدودة بالساحة العقدية.

★ لنبحث الآن عن جذور المعادلة $\sin Z = 0$

نعلم أن $\sin Z = 0 \Leftarrow |\sin Z| = 0 \Leftarrow |\sin Z|^2 = 0 \Leftarrow \sin^2 x + sh^2 y = 0$

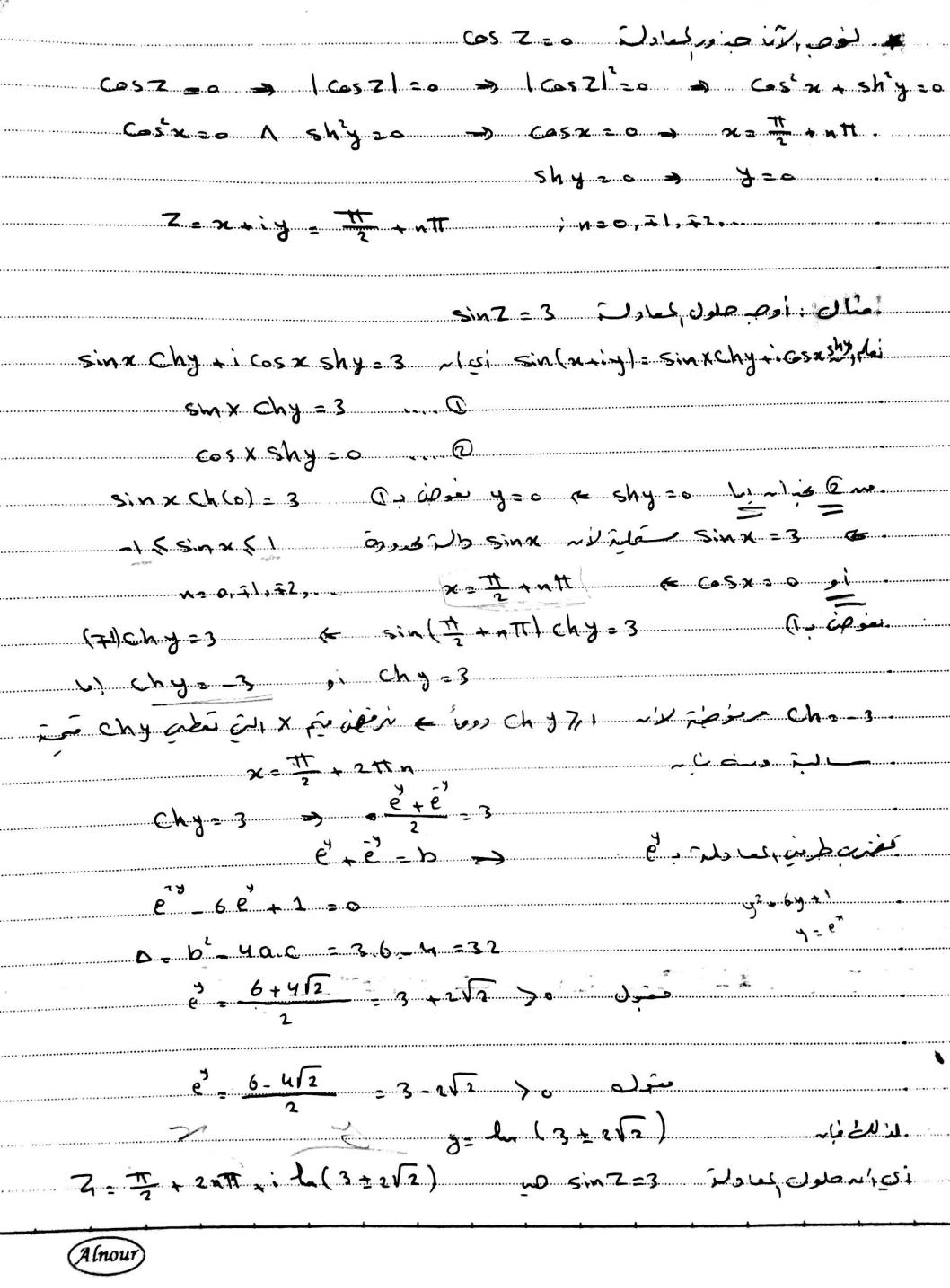
" مجموع مربعين يساوي الصفر إذا كان كل منهما يساوي الصفر" $sh^2 y = 0$ و $\sin^2 x = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi \quad ; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$sh \, y = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad sh \, y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = 0 \Rightarrow e^{y} = e^{-y}$

$y = -y$

$\Rightarrow Z = n\pi \quad ; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots \qquad \Rightarrow y = 0$



* لنوجد الآن جذور المعادلة $\cos z = 0$

$$\cos z = 0 \rightarrow |\cos z| = 0 \rightarrow |\cos z|^2 = 0 \rightarrow \cos^2 x + sh^2 y = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \;\wedge\; sh^2 y = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$sh\, y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$z = x + iy = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad ; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

مثال: أوجد حلول المعادلة $\sin z = 3$

نعلم أن $\sin(x+iy) = \sin x\, ch y + i \cos x\, sh y$ إذاً $\sin x\, ch y + i \cos x\, sh y = 3$

$\sin x\, ch y = 3 \quad \dots ①$

$\cos x\, sh y = 0 \quad \dots ②$

من ② نجد إما $sh y = 0 \Leftarrow y = 0$ نعوض بـ ① $\sin x\, ch(0) = 3$

$\Leftarrow \sin x = 3$ مستحيلة لأن $\sin x$ محدودة $-1 \le \sin x \le 1$

أو $\cos x = 0 \Leftarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

نعوض بـ ① $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)\, ch y = 3 \Leftarrow (\mp 1)\, ch y = 3$

إما $ch y = -3$ ، أو $ch y = 3$

$ch = -3$ مرفوضة لأن $ch y \ge 1$ دوماً $\Leftarrow$ نرفض قيم x التي تعطي $ch y$ قيمة سالبة ومنه

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$ch y = 3 \rightarrow \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = 3$$

نضرب طرفي المعادلة بـ e^{y}: $e^{y} + e^{-y} = 6 \rightarrow$

$$e^{2y} - 6e^{y} + 1 = 0$$

$y^2 - 6y + 1$ ، $y = e^{x}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 = 32$$

$e^{y} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} > 0$ مقبول

$e^{y} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} > 0$ مقبولة

إذاً للحل جوابه $y = \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$

إذاً حلول المعادلة $\sin z = 3$ هي $z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + i \ln(3 \pm 2\sqrt{2})$

الدوال الزائدية (المثلثية)

نعلم أن $sh\,x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $ch\,x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

لذلك نعرف دالة الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي من خلال العلاقتين الآتيتين:

$$sh\,z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad ch\,z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

بما أن دالة الجيب الزائدي ودالة الجيب التمام الزائدي كل منهما عبارة عن تركيب خطي من الدالتين e^{z}, e^{-z} وبما أن هاتان الدالتان دالتان تحليليتان نستنتج أن دالة الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي هما دالتان تحليليتان والمشتقة الأولى

$$\frac{d}{dz} sh\,z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = ch\,z$$

$$\frac{d}{dz} ch\,z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = sh\,z$$

كما نعرف دالة الظل الزائدي ودالة ظل التمام الزائدي من خلال العلاقتين

$$Th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} \quad ; \quad coth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z}$$

وبما أن قسمة دالتين تحليليتين هي دالة تحليلية باستثناء التي تعدم المقام نستنتج أن دالة الظل الزائدي هي دالة تحليلية عند جميع النقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة $ch\,z = 0$

وكذلك الأمر دالة ظل التمام الزائدي هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي باستثناء جذور المعادلة $sh\,z = 0$

لنوجد الآن $Im(ch\,z)$, $Re(ch\,z)$, $Im(sh\,z)$, $Re(sh\,z)$

نفرض أن $z = x+iy$ عندئذ

$$sh\,z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}$$

$$= \frac{e^{x}}{2}[\cos y + i\sin y] - \frac{e^{-x}}{2}[\cos y - i\sin y]$$

$$= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\cos y + i\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\sin y = sh\,x\cos y + i\,ch\,x\sin y$$

بنفس الأسلوب نجد أن

$$ch\,z = ch\,x\cos y + i\,sh\,x\sin y$$

$Re(sh\,z) = sh\,x\cos y$ $Re(ch\,z) = \cos y\,ch\,x$

$Im(sh\,z) = ch\,x\sin y$ $Im(ch\,z) = sh\,x\sin y$

يمكن الإشارة بعد إيجاد المشتقات الجزئية لكل من القسم الحقيقي والقسم التخيلي لدالة الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي على أن هذه المشتقات موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي أي أن دالة الجيب الزائدي والجيب التمام الزائدي هما دالتان قابلتان للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي.

" نقص بداية المحاضرة ..

أوجد جميع حلول المعادلة $e^z = 1+i\sqrt{3}$

$e^x \cdot e^{iy} = e^x[\cos y + i \sin y]$

الحل: نفرض أن $z = x+iy$ عندئذ $\Rightarrow e^x \cos y + i e^x \sin y = 1+i\sqrt{3}$

ومنه فإن:

$e^x \cos y = 1$ ... (1)

$e^x \sin y = \sqrt{3}$ ... (2)

بالتربيع والجمع نجد: $e^{2x} = 4 \rightarrow 2x = \ln 4 \rightarrow x = \ln 2$

بالتعويض بالمعادلة (1) نجد أن:

$e^{\ln 2} \cos y = 1$

ومنه: $2\cos y = 1 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المعطاة هي

$Z = x+iy = \ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$

أي أن النقطة $1+i\sqrt{3}$ صورة لعدد كبير من النقاط هذه النقاط متساوية بالأجزاء الحقيقية وتختلف بالأجزاء التخيلية . في ① أي أن النقاط Z تقع على مستقيم يوازي الشاقول

نعلم أن: $w = e^z \Rightarrow |w| = |e^z| = e^x > 0 \Rightarrow w \neq 0$

ومن هذا نستنتج أن مجموعة قيم الدالة الأسية هي المستوي العقدي w بأكمله باستثناء النقطة $w=0$

فإنها ليست صورة لأي نقطة من المستوي العقدي من Z

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z[\cos 2\pi + i \sin 2\pi] = e^z$

نستنتج أن الدالة الأسية دالة دورية ودورها 2π أي أن الدورة هي دورة تخيلية $e^z = -1$

نعلم أنه في الساحة الحقيقية $e^x > 0$ لكن في الساحة العقدية من الممكن أن يكون (e^z عددًا سالبًا)

مثال: أوجد حلول المعادلة $e^z = -1$

$e^z = -1$ ، $e^x \cos y + i e^x \sin y = -1$

$e^x \cos y = -1$ ... (1) ، $e^x \sin y = 0$ ... (2)

من (2) نجد أن $e^x > 0$ فقط $\Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = n\pi$ ،

نعوض في (1) فنجد أن:

$e^x \cos(n\pi) = -1$

$e^x (\pm 1) = -1$

أي أنه إما $e^x = 1$ أو $e^x = -1$ مرفوضة

وبالتالي $e^z > 0$ في المعادلة الثانية $e^x = -1$ مستحيلة

Alnour

وبالتالي فإن $y = \pi + 2n\pi$ وبالتالي $e^{x} = 1$ أي أن $x = \ln 1 = 0$

وبالتالي فإن حلول المعادلة المعطاة هي:

$$z = x + iy = 0 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

الإثبات: إذا كان $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$e^{z_1} = e^{x_1}[\cos y_1 + i \sin y_1] \qquad e^{z_2} = e^{x_2}[\cos y_2 + i \sin y_2]$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2}[\cos(y_1) + i\sin(y_1)][\cos(y_2) + i\sin(y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

* الدوال المثلثية:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\text{(بالجمع)} \ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad , \quad \text{(بالطرح)} \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

وبالتالي يمكننا أن نعرف الدوال المثلثية من خلال العلاقات الآتية

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

إن كل من دالة الجيب المثلثي والجيب تمام المثلثي هي دوال شاملة أي أنها تحليلية عند جميع نقاط المستوى المعقد وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق وذلك لأن كل منهما عبارة عن تركيب خطي من الدالتين الأسيتين e^{-iz}, e^{iz} وبالتالي فإن

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

ونعرف دالتي الظل المثلثي والظل تمام المثلثي من خلال العلاقتين

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

وبما أن قسمة دالتين تحليليتين هي دالة تحليلية نستنتج أن دالة $\tan z$ هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوى المعقد باستثناء جذور المعادلة التي تعدم المقام $\cos z = 0$

وكذلك الأمر دالة الظل تمام المثلثي هي دالة تحليلية عند جميع نقاط المستوى المعقد باستثناء جذور المعادلة $\sin z = 0$

لإيجاد $Re(\sin z)$, $Im(\sin z)$, $Re(\cos z)$, $Im(\cos z)$

نفرض أن $z = x + iy$ عندئذ

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y}}{2i}(\cos x + i\sin x) - \frac{e^{y}}{2i}(\cos x - i\sin x)$$

$$= \left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right)\sin x + \left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2i}\right)\cos x$$ نضع بأبسط شكل أي

$$= \sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + i\left(\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\right)$$

وبالتالي يكون

$$\sin z = \sin x \, chy + i \cos x \, shy$$

وبشكل مماثل

$$\cos z = \cos x \, chy - i \sin x \, shy$$

أي أن

$$Re(\sin z) = \sin x \, chy \qquad Im(\sin z) = \cos x \, shy$$

$$Re(\cos z) = \cos x \, chy \qquad Im(\cos z) = -\sin x \, shy$$

لنثبت الآن بطريقة ثانية أن $\sin z$, $\cos z$ هي دوال شاملة

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \, chy \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \, chy$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \, shy \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \, shy$$

وهذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي

علاوة على ذلك يتحقق شرط كوشي ريمان

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(\sin z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \, chy - i \sin x \, shy = \cos z$$

بشكل مماثل تماماً نثبت أن دالة التجيب هي دالة شاملة

$$(\cos z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \qquad = -\sin z$$

تمرين (1): أثبت أنه

$$e^{\frac{2+\pi i}{4}} = \sqrt{e}\left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^{2}$$

الحل:

$$e^{\frac{2+\pi i}{4}} = e^{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{e}\left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$e^{(2\pm 3\pi i)} = e^{2} e^{\pm 3\pi i} = e^{2}\left(\cos(\pm 3\pi)+i\sin(\pm 3\pi)\right)$$

$$= e^{2}(-1+i0) = -e^{2}$$

تمرين (2): أوجد جميع قيم z والتي تحقق المعادلة

$$e^{z} = -2 \qquad e^{2z-1} = 1$$

الحل: نفرض أن $z = x+iy$ عندئذ

$$e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y = -2$$

ومنه فإن

(1) $e^{x}\cos y = -2$

(2) $e^{x}\sin y = 0$

وبما أن $e^{x}>0$ فإن $y = n\pi \Leftarrow \sin y = 0$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

نعوض في (1) نجد

$$e^{x}\cos(n\pi) = -2$$

$$e^{x}\cdot \pm 1 = -2 \Rightarrow e^{x} = 2 \qquad e^{x} = -2$$

وبما أن $e^{x}>0$ فالمعادلة $e^{x}=-2$ مستحيلة إذا $y = 2n\pi + \pi$

وبالتالي فإن $e^{x} = 2 \Leftarrow x = \ln 2$

$$z = x+iy = \ln 2 + i(2n+1)\pi$$

يمكن حلها بالمقارنة بالشكل القطبي

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$e^{x}(\cos y + i\sin y) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

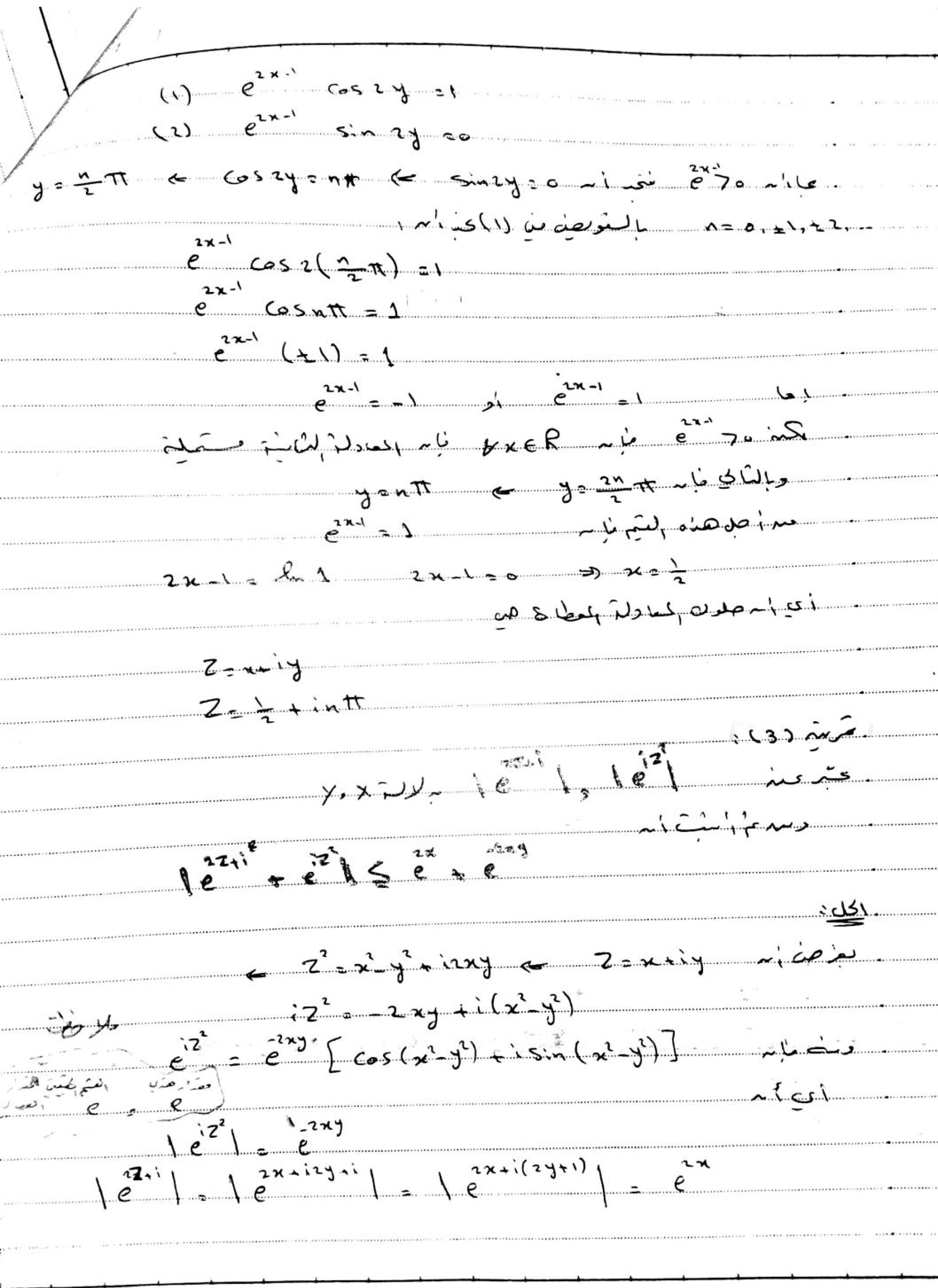
$$e^{2z-1} = 1$$

$$2z = 2x + i2y \Leftarrow z = x+iy$$

$$e^{2z-1} = e^{2x-1+i2y} = e^{2x-1}[\cos 2y + i\sin 2y]$$

وبالتالي فإن

$$e^{2x-1}[\cos 2y + i\sin 2y] = 1$$



(1) $e^{2x-1}\cos 2y = 1$

(2) $e^{2x-1}\sin 2y = 0$

علماً أن $e^{2x-1}>0$ نجد أن $\sin 2y = 0$ ⇐ $\cos 2y = n\pi$ ⇐ $y=\frac{n}{2}\pi$

$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ بالتعويض في (1) نجد أن

$e^{2x-1}\cos 2\left(\frac{n}{2}\pi\right) = 1$

$e^{2x-1}\cos n\pi = 1$

$e^{2x-1}(\pm1)=1$

إما $e^{2x-1}=1$ أو $e^{2x-1}=-1$

لكن $e^{2x-1}>0$ من $\forall x\in R$ فإن المعادلة الثانية مستحيلة

وبالتالي فإن $y=\frac{2n}{2}\pi$ ⇐ $y=n\pi$

ومن أجل هذه القيم فإن $e^{2x-1}=1$

$2x-1=\ln 1$ $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

أي أن حلول المعادلة المعطاة هي

$z=x+iy$

$z=\frac{1}{2}+in\pi$

تمرين (3):

عيّن $|e^{2z+i}|, |e^{iz^2}|$ بدلالة x, y

ومن ثم أثبت أن

$$|e^{2z+i}+e^{iz^2}| \le e^{2x}+e^{-2xy}$$

الحل:

نفرض أن $z=x+iy$ ⇐ $z^2=x^2-y^2+i2xy$ ⇐

$iz^2=-2xy+i(x^2-y^2)$

ومنه فإن $e^{iz^2}=e^{-2xy}\left[\cos(x^2-y^2)+i\sin(x^2-y^2)\right]$

ملاحظة: [illegible] e ، e

أي أن

$|e^{iz^2}|=e^{-2xy}$

$|e^{2z+i}|=|e^{2x+i2y+i}|=|e^{2x+i(2y+1)}|=e^{2x}$

نعلم أن: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

وبشكل عام:

$$|e^{2z+i}+e^{iz^2}| \le |e^{2z+i}|+|e^{iz^2}| = e^{2x}+e^{-2xy}$$

تمرين (4): أثبت أن $|e^{-2z}|<1$ إذا وفقط إذا $Re\,z>0$

الحل:

نفرض أن $z=x+iy$

$-2z = -2x - i2y$

$|e^{-2z}| = e^{-2x}$

نفرض أن $|e^{-2z}|<1$ أي أن $e^{-2x}<1$ نضرب e^{2x}

$1<e^{2x}$

$\ln 1 < \ln e^{2x} \Rightarrow 0<2x \Rightarrow 0<x$

أي أن $Re\,z>0$

لنفرض أن $Re\,z>0$ أي أن $x>0 \Rightarrow 2x>0$

$e^{2x}>1 \Rightarrow 1>e^{-2x} = |e^{-2z}|$

تمرين (5): اكتب كل مما يلي على الصورة $a+ib$

$\sin(2i)$, $\cos(1-i)$, $sh(1+\pi i)$, $ch(i\frac{\pi}{2})$

الحل:

نعلم أنه إذا كانت $z=x+iy$ فإن

$\sin z = \sin x\, ch\,y + i\cos x\, sh\,y$

$\sin(2i) = \sin(0)\, ch(2) + i\cos(0)\, sh(2) = i\, sh(2)$

$\cos z = \cos x\, ch\,y - i\sin x\, sh\,y$

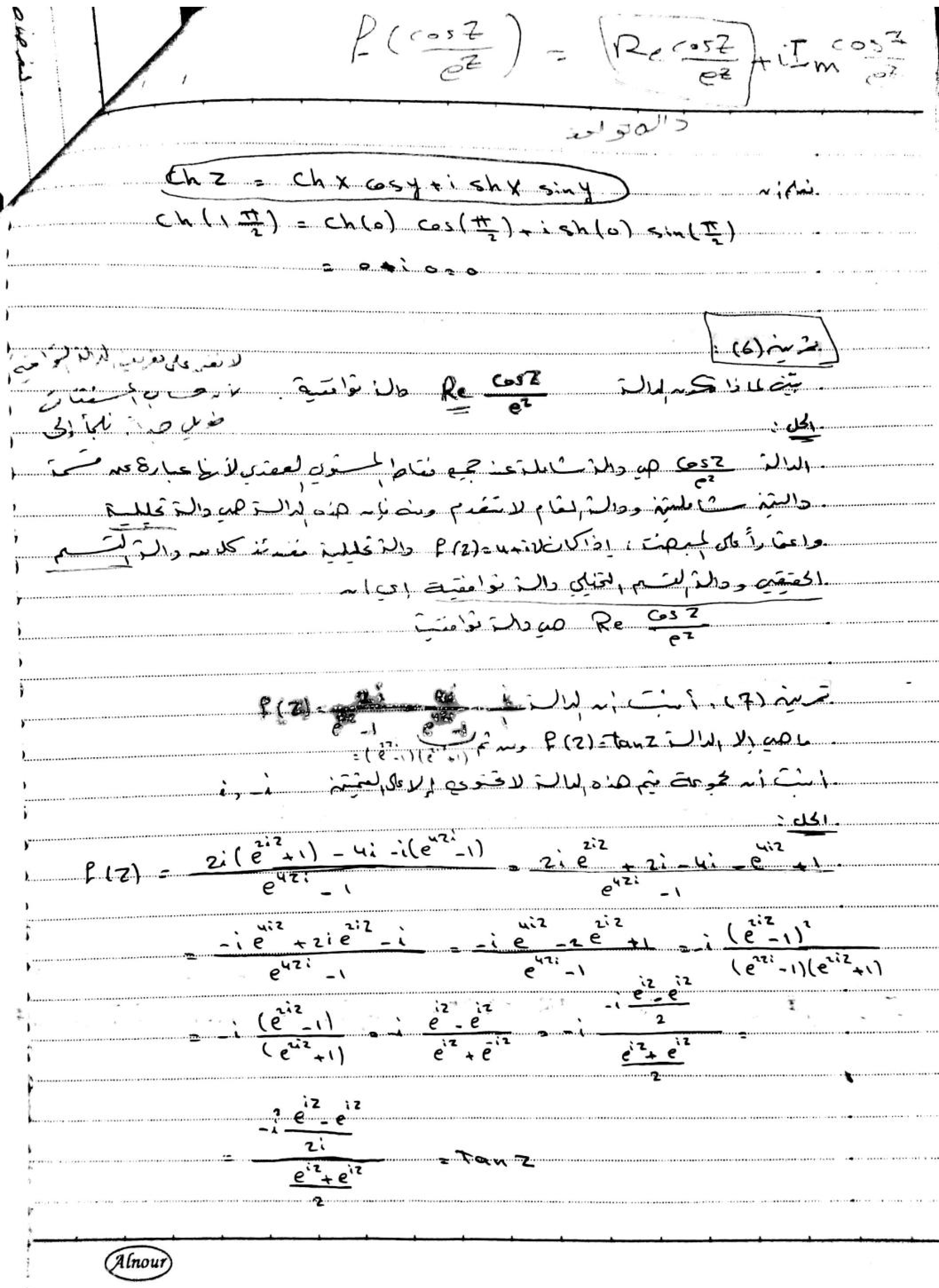
$\cos(1-i) = \cos(1)\, ch(-1) - i\sin(1)\, sh(-1)$

$= \cos(1)\, ch(1) + i\sin(1)\, sh(1)$

نعلم أن $sh(z) = sh\,x \cos(y) + i\, ch\,x \sin y$

$sh(1+\pi i) = sh(1)\cos(\pi) + i\, ch(1)\sin(\pi) = -sh(1) + i\, ch(1).0$

$= -sh(1)$



$$f\left(\frac{\cos z}{e^z}\right) = \operatorname{Re}\frac{\cos z}{e^z} + i\operatorname{Im}\frac{\cos z}{e^z}$$

دالة توافقية

نعلم:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\operatorname{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch}(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sh}(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 + i\,0 = 0$$

تمرين (6):

بين لماذا تكون الدالة $\operatorname{Re}\frac{\cos z}{e^z}$ دالة توافقية.

لا نعوض على تعويض الدالة التوافقية ... نحسب المشتقات ... طويل جداً نلجأ إلى

الحل:

الدالة $\frac{\cos z}{e^z}$ هي دالة تحليلية على جميع نقاط المستوي العقدي لأنها عبارة عن قسمة دالتين تحليليتين ودالة المقام لا تنعدم ومنه فإن هذه الدالة هي دالة تحليلية وعلى رأي المبرهنة: إذا كانت $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية عندئذ كل من دالة القسم الحقيقي ودالة القسم التخيلي دالة توافقية إذاً

$\operatorname{Re}\frac{\cos z}{e^z}$ هي دالة توافقية

تمرين (7): أثبت أن الدالة $f(z) = \frac{2i(e^{2iz}+1)-4i-i(e^{4iz}-1)}{e^{4iz}-1}$ ما هي إلا الدالة $f(z)=\tan z$ ومن ثم $= (e^{2iz}-1)(e^{2iz}+1)$

أثبت أن مجموعة قيم هذه الدالة لا تحتوي على العددين i ، $-i$

الحل:

$$f(z) = \frac{2i(e^{2iz}+1)-4i-i(e^{4iz}-1)}{e^{4iz}-1} = \frac{2ie^{2iz}+2i-4i-e^{4iz}+1}{e^{4iz}-1}$$

$$= \frac{-ie^{4iz}+2ie^{2iz}-i}{e^{4iz}-1} = \frac{-i(e^{4iz}-2e^{2iz}+1)}{e^{4iz}-1} = -i\frac{(e^{2iz}-1)^2}{(e^{2iz}-1)(e^{2iz}+1)}$$

$$= -i\frac{(e^{2iz}-1)}{(e^{2iz}+1)} = -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = -i\frac{\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2}}{\frac{e^{iz}+e^{iz}}{2}} =$$

$$= \frac{-i\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{iz}}{2}} = \tan z$$

Alnour

لنفرض جدلاً أن $w = i$ أي $\tan z = i$

$$\frac{\sin z}{\cos z} = i$$

$$i\frac{\sin z}{\cos z} = -1 \Rightarrow i\sin z = -\cos z \Rightarrow \cos z + i\sin z = 0$$

$e^{iz} = 0$ وهذا غير ممكن لذلك فإن الفرض الجدلي خاطئ

أي أن $w \neq i$

بنفس الأسلوب نثبت $-i$